

ملاحظة بشأن الأقواس : في كل صيغة ، يجب أن يكون عدد الأقواس الابتدائية (المفتوحة) "(" هو نفس عدد الأقواس الانتهائية (المغلقة) ")".

تعريف الكلمة : عندما نعرف لغة ما ، فإننا نحدد مجموعة من السلاسل لها صفة معينة ، عندئذٍ نطلق على مثل هذه السلاسل تعبير " كلمة" إذن الكلمة هي سلسلة لها صفة معينة . وغالباً لن نفرق في مقررنا بين الكلمة والصيغة .

ترميز: إذا كانت F صيغة ، و $A_1, A_2, \dots, A_n$ متحولات منطقية من $\mathcal{P}$ فإننا نستخدم الشكل $F(A_1, A_2, \dots, A_n)$ حيث المتحول A_i $(i = 1, \dots, n)$ يظهر مرة واحدة على الأقل في الصيغة F .

مثال : $F(A,B) = \big(A \Longrightarrow (A \vee B)\big)$ و $F(A,B,C) = \big(A \wedge (B \Rightarrow C)\big)$

$F(A,B,C) = \big((A \Rightarrow \neg B) \vee B\big)$

نلاحظ أنه لاوجود لـ C في الصيغة الأخيرة إذْ أننا يمكننا كتابتها مثلاً على الشكل :

$F(A,B,C) = \Big(\big((A \Rightarrow \neg B) \vee B\big) \vee (C \wedge \neg C)\Big)$ ، وذلك لأن المعنى لهذه الصيغة هو نفس معناها قبل كتابتها على هذا الشكل، لكننا لم نتكلم في المعنى بعدْ .

أما الكتابة الآتية خاطئة : $F(A,B,C) = \big((A \vee B) \wedge (\neg C \Rightarrow D)\big)$.

تعريف : ليكن لدينا الصيغة $F(A_1, A_2, \dots, A_n)$ وبفرض لدينا n صيغة $G_1, G_2, \dots, G_n$.

سنرمز للكلمة الناتجة عن استبدال كل صيغة G_i مكان المتحول A_i (على الترتيب(حيث $i = 1, \dots, n$)) في كل ظهور لها في F بالرمز:

$$F_{G_1|A_1, G_2|A_2, \dots, G_n|A_n}$$

مثال: لتكن الصيغة $F(A,B) = \big(A \Rightarrow (B \vee A)\big)$ والصيغة $G = (B \Rightarrow A)$

عندئذٍ : $F_{G|A} = \big(G \Rightarrow (B \vee G)\big) = \Big((B \Rightarrow A) \Rightarrow \big(B \vee (B \Rightarrow A)\big)\Big)$

مبرهنة(سنقبلها دون برهان): إذا كانت $F(A_1, A_2, \dots, A_n)$ صيغة ما بالمتحولات A_i (حيث $i = 1, \dots, n$) وكانت $G_1, G_2, \dots, G_n$ ، n صيغة، فإن السلسلة : $F_{G_1|A_1, G_2|A_2, \dots, G_n|A_n}$ هي صيغة .

مثال: لتكن $F(A,B,C) = \big((A \Rightarrow B) \Rightarrow C\big)$ صيغة و $H = (A \Rightarrow B)$

و $G_1 = (A \wedge B)$, $G_2 = (A \Rightarrow C)$, $G_3 = \big((A \Leftrightarrow B) \Rightarrow C\big)$ صيغ.

عندئذٍ: (باعتبار أنَّ $A_1 = A$, $A_2 = B$, $A_3 = C$)

$$F_{G_1|A_1, G_2|A_2, G_3|A_3} = \big((G_1 \Rightarrow G_2) \Rightarrow G_3\big)$$

$$= \Big(\big((A \wedge B) \Rightarrow (A \Rightarrow C)\big) \Rightarrow \big((A \Leftrightarrow B) \Rightarrow C\big)\Big)$$



ملاحظة: كما يمكننا أن نبدل صيغ مكان متحولات ، أيضاً يمكننا تبديل صيغ مكان صيغ . فمثلاً بنفس المثال السابق:

$F_{G_3|H} = (G_3 \Rightarrow C) = \big(((A \Leftrightarrow B) \Rightarrow C) \Rightarrow C\big)$ هنا وضعنا الصيغة G_3 مكان الصيغة H.

وحالة خاصة عندما تكون H أحد المتحولات.

ملاحظة: لتكن $F(A_1, A_2)$ صيغة ما، وG_1, G_2 صيغ ما.

يجدر بنا الإشارة إلى أنَّ التبديل للصيغ G_1, G_2 مكان المتحولات A_1, A_2 في الصيغة F أي عند إيجاد الصيغة $F_{G_1|A_1, G_2|A_2}$ فإن التبديل يجري بنفس الوقت لا على مراحل.

بينما الرمز $\left[F_{G_1|A_1}\right]_{G_2|A_2}$ نقصد به أننا بدلنا في الصيغة F الصيغة G_1 مكان المتحول A_1 ومن ثَمَّ بدلنا في الصيغة الناتجة الصيغة G_2 مكان المتحول A_2 ، أيْ التبديل جرى على مراحل.

وليس من الضروري التساوي بين $\left[F_{G_1|A_1}\right]_{G_2|A_2}$ و $\left[F_{G_2|A_2}\right]_{G_1|A_1}$ أيْ:

$$\left[F_{G_2|A_2}\right]_{G_1|A_1} \neq \left[F_{G_1|A_1}\right]_{G_2|A_2} \neq F_{G_1|A_1, G_2|A_2}$$

مثال: لتكن الصيغة $F(A, B) = (A \land B)$ والصيغ $G_1 = (A \lor B)$ و $G_2 = (A \Rightarrow B)$

عندئذٍ :

$$F_{G_1|A\ ,\ G_2|B} = \big((A \lor B) \land (A \Rightarrow B)\big)$$

$$F_{G_1|A} = \big((A \lor B) \land B\big) \quad , \quad \left[F_{G_1|A}\right]_{G_2|B} = \Big(\big(A \lor (A \Rightarrow B)\big) \land (A \Rightarrow B)\Big)$$

$$F_{G_2|B} = \big(A \land (A \Rightarrow B)\big) \quad , \quad \left[F_{G_2|B}\right]_{G_1|A} = \Big((A \lor B) \land \big((A \lor B) \Rightarrow B\big)\Big)$$

واضح أنَّ : $\left[F_{G_1|A}\right]_{G_2|B} \neq \left[F_{G_2|B}\right]_{G_1|A} \neq F_{G_1|A\ ,\ G_2|B}$.

عرفنا المنطق الكلاسيكي من الناحية التركيبية (النحوية) ومفردات (*Terminal*) اللغة والآن سنأتي إلى المعنى (من الناحية الدلالية) :(*Semantics*) :

تعريف: لتكن $\mathcal{F}$ مجموعة الصيغ ، ولنعرف التطبيق : $\delta: \mathcal{F} \to \{0,1\}$ ندعو $\delta(A)$ بالقيمة المنطقية للصيغة A .

$$A \mapsto \delta(A)$$

إن قاعدة ربط هذا التطبيق لا يمكن إعطائها بشكل صريح ، ولكن يمكن إعطاء خواص هذا التطبيق :

١. $\delta(\neg A) = 1$ إذا وفقط إذا $\delta(A) = 0$
٢. $\delta(A \land B) = 1$ إذا وفقط إذا $\delta(A) = \delta(B) = 1$
٣. $\delta(A \lor B) = 0$ إذا وفقط إذا $\delta(A) = \delta(B) = 0$
٤. $\delta(A \Rightarrow B) = 0$ إذا وفقط إذا $\delta(A) = 1$ و $\delta(B) = 0$
٥. $\delta(A \Leftrightarrow B) = 1$ إذا وفقط إذا $\delta(A) = \delta(B)$



يمكن وضع هذه الخواص في جدول نسميه **جدول الحقيقة** $(Truth\ table)$ كما يلي :

A	B	$\neg A$	$A \vee B$	$A \wedge B$	$A \Rightarrow B$	$A \Leftrightarrow B$
1	1	0	1	1	1	1
1	0	0	1	0	0	0
0	1	1	1	0	1	0
0	0	1	0	0	1	1

نلاحظ أنَّ عدد الأسطر في الجدول هو 2^n حيث n هو عدد المتحولات المنطقية المدخلة ، فهنا لدينا متحولين ومن ثَمَّ لدينا أربعة أسطر. وكيفية وضع الواحدات والأصفار باتت من الأمور البسيطة لدى الطالب.

والقيمة المنطقية لقضية ما تكون في عمود تلك القضية .

مثال : ما هي القيمة المنطقية للصيغة $F = \big(A \Rightarrow (B \vee C)\big)$ ؟

نلاحظ هنا لدينا ثلاث متحولات منطقية في هذه الصيغة إذنْ لدينا في جدول الحقيقة $2^3 = 8$ أسطر .

A	B	C	$B \vee C$	$F = \big(A \Rightarrow (B \vee C)\big)$
1	1	1	1	1
1	1	0	1	1
1	0	1	1	1
1	0	0	0	0
0	1	1	1	1
0	1	0	1	1
0	0	1	1	1
0	0	0	0	1

نلاحظ أن عمود الصيغة F كله واحدات عدا في حالة B , C أصفار أي تكون القيمة المنطقية لهذه الصيغة صفراً فقط في هذه الحالة.

ملاحظة: إذا كانت الصيغة المنطقية لصيغة ما هي 1 وذلك مهما تكن القيم المنطقية للمتحولات المكونة منها ، عندئذٍ ندعو هذه الصيغة : " **استدلالاً** " $(Tautology)$ ، ويكون العمود الموافق لها في جدول الحقيقة كله واحدات. ونرمز للاستدلال بالرمز $\top$.

وإذا كانت الصيغة المنطقية لصيغة ما هي 0 وذلك مهما تكن القيم المنطقية للمتحولات المكونة منها ، عندئذٍ ندعو هذه الصيغة : " **تناقضاً** " $(Contradiction)$ ، ويكون العمود الموافق لها في جدول الحقيقة كله أصفار . ونرمز للتناقض بالرمز $\perp$.

مثال: إن القيمة المنطقية للصيغة $(A \vee \neg A)$ دائماً واحد بغض النظر عن القيمة المنطقية لِـ A ومنه تكون هذه الصيغة استدلالاً ، أما الصيغة $(A \wedge \neg A)$ هي تناقضٌ لأن قيمتها المنطقية دائماً صفر.

Syria Math
www.syriamath.net

تعريف: لتكن G و F صيغتين منطقيتين ، نقول إنَّ F تكافئ G منطقياً إذا وفقط إذا كانت الصيغة $G \Leftrightarrow F$ استدلالاً.
ونرمز لذلك ب $F \sim G$ أو الرمز $F \equiv G$ أو تجاوزاً بالرمز $F = G$ ويجب الانتباه أن هذه المساواة لا تعني أنَّ الصيغة F هي نفسها الصيغة G بل متكافئتان، ونلاحظ أن الصيغتان المتكافئتان لهما نفس القيم المنطقية في جدول الحقيقة.

ملاحظة : هناك مراجع تفرق بين الرمزين $\Leftrightarrow$ و $\leftrightarrow$ فتعتبر الصيغة $A \Leftrightarrow B$ هي صيغة ممكن أن تكون خاطئة أو صحيحة وليس من الضروري أن تكون صحيحة دوماً أو خاطئة دوماً ، أما الصيغة $A \leftrightarrow B$ فيعتبرونها استدلال (صحيحة دوماً) .
وبالنسبة لمقررنا لن نفرق بين الرمزين معتبرين أنَّ الصيغة $A \Leftrightarrow B$ التي هي نفسها $A \leftrightarrow B$ ليس بالضرورة أن تكون استدلالاً .

مبرهنة(سنقبلها دون برهان): إذا كانت الصيغةُ $F(A_1, A_2, \dots, A_n)$ استدلالاً وكانت $G_1, G_2, \dots, G_n$ ، n صيغة فإنَّ الصيغةَ $F_{G_1|A_1, G_2|A_2, \dots, G_n|A_n}$ استدلالٌ.

أهم الصيغ المتكافئة (استدلالات) (أهم خواص أدوات الربط المنطقية) ، يمكن أخذها كـ دساتير أو قوانين :

- خاصتي **اللا نمو** لكل من الأداتين $\wedge$ و $\vee$: $A \wedge A = A$ و $A \vee A = A$ (أشرنا إلى أن الرمز $=$ نضعه تجاوزاً)
- الخاصة **التبديلية** لكل من الأداتين $\wedge$ و $\vee$: $A \wedge B = B \wedge A$ و $A \vee B = B \vee A$.
- الخاصة **التجميعية** لكل من الأداتين $\wedge$ و $\vee$: $(A \wedge B) \wedge C = A \wedge (B \wedge C)$ و $(A \vee B) \vee C = A \vee (B \vee C)$
- الخاصة **التوزيعية** للأداة $\wedge$ على $\vee$: $A \wedge (B \vee C) = (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$.
- الخاصة **التوزيعية** للأداة $\vee$ على $\wedge$: $A \vee (B \wedge C) = (A \vee B) \wedge (A \vee C)$.
- قوانين **المحايد** $A \wedge \top = A$ و $A \vee \bot = A$
- و **الماص:** $A \vee \top = \top$ و $A \wedge \bot = \bot$
- قوانين **الإتمام** $A \wedge \neg A = \bot$ و $A \vee \neg A = \top$
- و **الارتداد** : $\neg \top = \bot$ و $\neg \bot = \top$ و $\neg \neg A = A$
- قانونا **ديمورغان** : $\neg (A \wedge B) = \neg A \vee \neg B$ و $\neg (A \vee B) = \neg A \wedge \neg B$

- **التكافؤ الذهبي :** $(A \Rightarrow B) = \neg A \vee B$ (هذا يذكرنا عندما كنا نريد أن نبرهن اقتضاء كنا نبرهن نفي الأول أو الثاني)
- $(A \Leftrightarrow B) = \big((A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A)\big)$
- $(A \Rightarrow B) = (\neg B \Rightarrow \neg A)$

لبرهان هذه الخواص نستخدم جدول الحقيقة .

نلاحظ أن هذه القوانين (الخواص) تشبه قوانين جبر المجموعات إذْ أنَّ عملية الاجتماع $\cup$ تشبه أداة الفصل $\vee$ وعملية التقاطع $\cap$ تشبه أداة الوصل $\wedge$ والمتمم تشبه أداة النفي والمجموعة الشاملة نسبياً تشبه الاستدلال $\top$ والمجموعة الخالية تشبه التناقض $\bot$.



مثال: بيِّن أنَّ $A \wedge (A \vee B) = A$.

يمكن أن نبين ذلك عن طريق استخدام جدول الحقيقة أو بالاستفادة من الخواص المذكورة أعلاه كما يلي :

$$A \wedge (A \vee B) = (A \vee \bot) \wedge (A \vee B)$$

$$= A \vee (\bot \wedge B) = A \vee \bot = A$$

بنفس الأسلوب يمكننا أن نبين أن $A \vee (A \wedge B) = A$.

لنبرهن $A \vee (A \wedge B) = A$ باستخدام جدول الحقيقة .

A	B	$A \wedge B$	$A \vee (A \wedge B)$
1	1	1	1
1	0	0	1
0	1	0	0
0	0	0	0

نلاحظ أن في العمودين الأول والأخير نفس القيم المنطقية ، إذنْ تكون الصيغتان $A \vee (A \wedge B)$ و A متكافئتين .

أي $\left(A \vee (A \wedge B)\right) \sim A$ ، أو $A \vee (A \wedge B) = A$.

المجموعات التامة للروابط:

تعريف: نقول عن مجموعة جزئية H من المجموعة $\{\neg, \vee, \wedge, \Rightarrow, \Leftrightarrow\}$ إنها تامة إذا تمكنا من توليد جميع الصيغ الممكنة من باستخدام عناصر H .

أمثلة : من الواضح أن المجموعة $\{\neg, \vee, \wedge, \Rightarrow, \Leftrightarrow\}$ هي مجموعة تامة .

لنبين أن المجموعة $\{\neg, \vee\}$ هي مجموعة تامة وذلك يتم كما يلي: $\neg A$ موجود و $A \vee B$ موجود

$A \wedge B = \neg(\neg A \vee \neg B)$ كتبنا هذه الصيغة باستخدام الأداتين $\neg, \vee$ فقط .

$$(A \Rightarrow B) = (\neg A \vee B)$$

$$(A \Leftrightarrow B) = \left((A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A)\right) = \left((\neg A \vee B) \wedge (\neg B \vee A)\right)$$

$$= \neg\left(\neg(\neg A \vee B) \vee \neg(\neg B \vee A)\right)$$

وبنفس الأسلوب نرى أن المجموعة $\{\neg, \wedge\}$ هي مجموعة تامة.

ملاحظة : النفي موجود في أي مجوعة تامة .

.: انتهت المحاضرة الثالثة :.